**Conteúdos**

*Experiencia aleatória*

*Conjunto de resultados*

*Acontecimentos*

*Classificação de acontecimentos*

*Operações com acontecimentos*

*Aproximações concetuais de probabilidade*

*Aproximação frequencista*

*Definição clássica ou de Laplace*

*Definição axiomática (caso finito)*

*Propriedades da probabilidade*

*Probabilidade condicionada e independência*

## Subtema 1 - Probabilidades

Quando lançamos uma moeda ao ar dizemos que a probabilidade de sair uma das faces é de 50%. A nossa afirmação tem como base o facto de existir uma possibilidade em duas.

Quando um médico refere que um paciente tem 95% de possibilidades de sobreviver a uma operação, toma como base a sua experiência e faz corresponder a probabilidade com a frequência relativa do acontecimento.

No primeiro caso, assumimos um modelo de probabilidade que nos permite deduzir propriedades do geral para o particular.

No segundo caso, utilizamos a estatística para pensar no sentido inverso. A credibilidade dos resultados e conclusões retiradas neste processo têm como base a Teoria das probabilidades.

Este processo de inferir resultados e prever situações é de interesse vital, permitindo antecipar e planificar estratégias que permitam resolver diferentes situações.

**Tarefa 1**

Das seguintes experiências indica as que são aleatórias e as que são deterministas.

a) Lançar ao ar uma moeda e registar a face que fica voltada para cima.

b) Observar a quantidade de água derramada quando se introduz uma esfera de 2cm de raio num recipiente com água.

c) Num jogo de cartas, registar o número de ases distribuídos a um dos jogadores.

d) Lançar um dado e registar a face que fica voltada para cima.

## Introdução ao cálculo de probabilidades

### Experiências aleatórias e experiências deterministas

Os chamados "jogos de azar ", sejam com dados , cartas ou roletas... têm uma caraterística comum, não é possível saber com antecedência o resultado que vamos a obter.

É esta particularidade que carateriza as experiências aleatórias.

Uma **experiência aleatória** é uma experiência com as seguintes caraterísticas:

- Pode sempre ser repetida nas mesmas condições;
- Não é possível determinar à partida o resultado obtido;
- São conhecidos todos os resultados possíveis.

São aleatórias todas as experiências realizadas em jogos:

Retirar uma carta de um baralho e registar a cor obtida, rodar a roleta e registar o número, lançar um dado e registar o número da face que fica voltada para cima, jogar na lotaria.

Se deixar cair um a pedra num recipiente com água à partida sei que a pedra vai para o fundo do recipiente, estamos então em presença de uma experiencia não aleatória ou determinista.

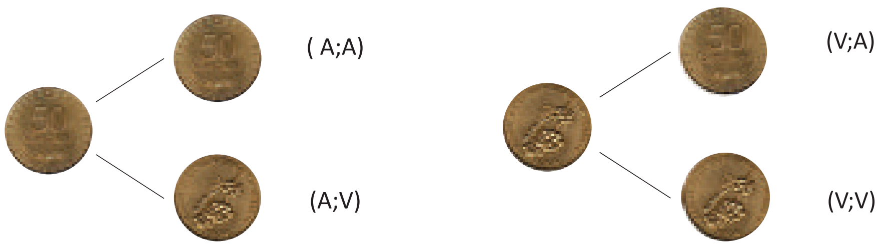
### Conjunto de resultados ou espaço amostral

Lançamos duas vezes ao ar uma moeda de 50 centavos e registamos, em cada lançamento, a face da moeda que ficou voltada para cima.


Face anverso (A)


Face verso (V)

Para registar todos os resultados possíveis desta experiência, podemos recorrer a um diagrama de árvore:




O conjunto de todos os resultados possíveis é: {(A;A) ; (A;V); (V;A); (V;V)}

> **Conjunto de resultados ou espaço amostral** de uma experiência aleatória é o conjunto de resultados possíveis que lhe está associado e representa-se habitualmente por : S, E ou Ω

No exemplo anterior o espaço amostral é S = {(A;A) ; (A;V); (V;A); (V;V)}

Ainda na mesma experiencia anterior podemos pensar de outra forma:

No lançamento, duas vezes, de uma moeda de 50 centavos. Quantas vezes aparece a face anverso? Neste caso o espaço amostral será S= {0; 1:2}. Se não sai nenhuma, se sai uma ou se saem duas.

> Chamamos **acontecimento** numa experiência aleatória a todo subconjunto do espaço amostral.

Considera o acontecimento A, um subconjunto qualquer de um espaço amostral S.

Observa que : Quando o acontecimento A é o **conjunto vazio**, temos um **acontecimento impossível**.

Quando o acontecimento A é igual ao **espaço amostral**, temos um **acontecimento certo**.

**Referência Histórica**

A incerteza foi, ao longo dos tempos, a principal razão do estudo das probabilidades.

**Giordamo Cardano (1501-1576)** foi um matemático italiano que escreveu mais de 200 livros dedicados a diferentes áreas do saber. Entre as suas obras destaca-se o "liber de Ludo Aleæ" (Livro dos Jogos de Azar), que é considerado o primeiro livro completo dedicado as probabilidades.

Problemas relacionados com o jogo continuaram a alimentar a reflexão e discussão em torno das probabilidades. Deste tipo de reflexão destaca-se, no

século XVII, a troca de correspondência entre **Pierre Fermat (1601-1665)** e **Blaise Pascal (1623-1662)** acerca de um problema colocado a este último por, **Antonie de Gambard (1610-1685)**, mais conhecido como cavaleiro De Méré.

Referência Histórica

**O problema do cavaleiro De Méré**

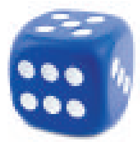
Dois jogadores, De Méré e o seu adversário estão a jogar aos dados. Cada um aposta num determinado número e ganha o primeiro a obter pela terceira vez o número em que apostou. A aposta foi de 64 moedas (32 de cada um) e o jogo foi interrompido quando De Méré tem 2 sucessos contra um do adversário.

Como deve ser repartido o valor apostado?

Quando o acontecimento A é um conjunto que tem **um só elemento**, temos um **acontecimento elementar**.

Quando o acontecimento A é um conjunto com **mais de um elemento** é um **acontecimento composto**.

## Exemplo:



No lançamento de um dado. O espaço amostral é {1;2;3;4;5;6}

Considera agora os seguintes acontecimentos:

a) “ sair face par”

É o conjunto A= { 2; 4;6} , acontecimento composto.

b) “ Sair um múltiplo de 5”

É o conjunto { 5 }, acontecimento elementar.

c) ” sair um número menor que 7 “

É o conjunto { 1;2;3;4;5;6}, o espaço amostral. Temos um acontecimento certo

d) “ Sair o número 9”

É o conjunto { } ou pelo símbolo Ø, acontecimento impossível.

**Espaço de acontecimentos** é o conjunto formado por todos os subconjuntos do espaço amostral e designa-se por P (S).

## Exemplo:

Num saco temos três cartões numerados de 1 até 3.

Logo o espaço amostral é S = { 1; 2; 3 }

O espaço de acontecimentos é :

P (S) ={Ø, {1}; {2}; {3}; {1;2}; { 1;3}; {2;3} ; {1;2;3}}

## Exemplo:

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar sucessivamente dois dados cúbicos, equilibrados, em que o número de pintas das faces varia de 1 a 6, e anotar o número de pintas da face que fica voltada para cima.

Indica o espaço de resultados

Para resolver este exemplo vamos usar uma **tabela de dupla entrada:**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1;1) | (1;2) | (1;3) | (1;4) | (1;5) | (1;6) |
| 2 | (2;1) | (2;2) | (2;3) | (2;4) | (2;5) | (2;6) |
| 3 | (3;1) | (3;2) | (3;3) | (3;4) | (3;5) | (3;6) |
| 4 | (4;1) | (4;2) | (4;3) | (4;4) | (4;5) | (4;6) |
| 5 | (5;1) | (5;2) | (5;3) | (5;4) | (5;5) | (5;6) |
| 6 | (6;1) | (6;2) | (6;3) | (6;4) | (6;5) | (6;6) |

O espaço amostral ou espaço de resultados é o conjunto formado pelos 36 elementos da tabela:

$$\Omega = \{(1;1);(1;2);......(6;6)\}$$

O acontecimento A : "sair o mesmo número nos dois dados pode ser representado pelo conjunto:

$$A = \{(1;1);(2;2);.(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$$

### Operações com acontecimentos

Como relacionamos os acontecimentos com conjuntos, as operações com acontecimentos, não são nada mais que operações com conjuntos.

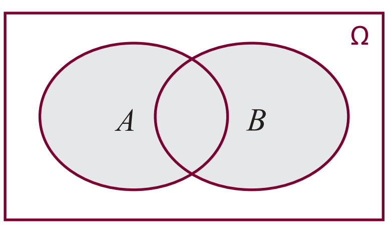
**União de acontecimentos**

A união de dois acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se pelo menos um dos acontecimentos A ou B se realiza.

O acontecimento união é constituído pelos resultados que pertencem a pelo menos um dos acontecimentos.

Representa-se por: $A \cup B$

Os diagramas de Venn são usados para visualizar acontecimentos dentro de um espaço amostral .




**Referência Histórica**

Dé Mére achava que tinha direito a 48 (metade de 64 mais metade do restante) ficando 16 para o seu adversário. Este não tinha a mesma opinião e defendia que tinha direito a 1/3 das moedas, 21 moedas, ficando De Méré com as restantes 43.

Pascal numa das suas cartas a Fermat refere a seguinte opinião: (Pascal passa a falar como se fosse De Méré) " Ora eu estou então seguro de ter 32 pistólas porque mesmo perdendo (entenda-se por perder sair o número do meu adversário na próxima jogada) as ganho; quanto às outras 32, talvez eu as tenha, talvez vós as tenhais: o azar é igual.

Partilhemos pois essas 32 moedas pela metade e assim receberei 16 para além das 32 que já me estão asseguradas"

Foi assim que Pascal expôs a Fermat a sua opinião de que De Méré tinha direito as 48 moedas.

**Tarefa 2**

Determina o espaço amostral em cada uma das experiências seguintes:

a) Lançar um dado e considerar o número da face virada para cima.

b) Lançar um dado e uma moeda de 50 centavos e considerar as faces viradas para cima.

c) Tirar, uma a uma, bolas de um saco com bolas numeradas de 3 a 10 até sair a bola com o número 5 e registar o número de bolas tiradas.

d) Perguntar a duas pessoas se gostam (S) ou não (N) de praia.

**Tarefa 3**

Três jogadores A, B e C disputam um torneio de ténis.

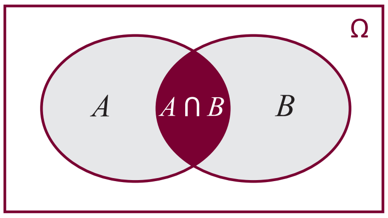
Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.

Quais são os resultados possíveis do torneio?

**Interseção de acontecimentos**

A interseção de dois acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A e B acontecem simultaneamente.

O acontecimentos interseção é constituído pelos resultados comuns a A e B. Representa-se por $A \cap B$:




Exemplo:

No lançamento de um dado consideramos os seguintes acontecimentos:

A: " Ser divisor de 8"     B: " Ser múltiplo de 2"

S= { 1;2;3;4;5;6}     A = { 1;2;4}     B= { 2;4;6}

O acontecimento "A reunião com B" é o acontecimento

A U B : " Ser divisor de 8 ou múltiplo de 2"

A U B = { 1;2;4;6}

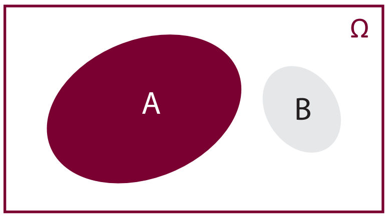
O acontecimento "A interseção com B" é o acontecimento

$A \cap B$ : " Ser divisor de 8 e múltiplo de 2"

$A \cap B$ = { 2; 4}

**Acontecimentos incompatíveis**

Acontecimentos incompatíveis ou disjuntos são acontecimentos que não têm resultados comuns. A e B são incompatíveis se e só se $A \cap B = \emptyset$.




Exemplo:

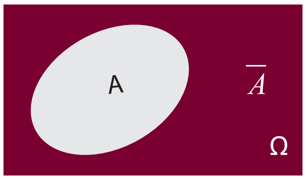
Num saco com bolas numeradas de 1 a 10 , os acontecimentos:

A: " Sair um número primo" e B: " Sair um número divisível por 4". São acontecimentos incompatíveis , visto que não há números primos que sejam divisíveis por 4.

### Acontecimento Contrário ou Complementar

O acontecimento contrário ou complementar de um acontecimento A é o acontecimento constituído por todos os resultados do espaço amostral que não pertencem a A. Representa-se por : $\overline{A}$ e verifica-se que:

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ e } A \cap \overline{A} = \emptyset$$




Dois acontecimentos contrários são sempre incompatíveis mas dois acontecimentos incompatíveis não são necessariamente contrários.

Exemplo:

No lançamento de um dado, consideramos o acontecimento

$A$ : " Sair face com um número inferior a 2"

O acontecimento contrário

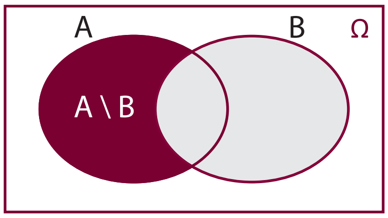
$\overline{A}$ : " Sair face com um número maior ou igual a 2"

### Acontecimento diferença

O acontecimento diferença entre A e B é o acontecimento que se realiza sempre que se realiza A e não se realiza B. É o acontecimento formado por todos os resultados que pertencem a A e não pertencem a B.

Representa-se por A \ B.

$$A \setminus B = A - B = A \cap \overline{B}$$

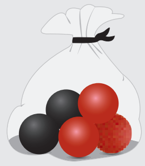



Exemplos:

1. Seja A={ 1; 2;3;4;5;6;7;8} e B ={ 1:6;8} então A \ B = { 2;3;4;5;7}
2. No conjunto de alunos de uma turma escolhe-se um aluno ao acaso.

**Tarefa 4**

Na figura está representado um saco com 5 bolas, duas pretas e uma vermelha.



Considera a experiência aleatória que consiste em retirar do saco três bolas e registar a sua cor.

a) Qual é o espaço amostral ?

b) Indica um acontecimento:

b.1 Elementar

b.2 Impossível

b.3 Composto

**Tarefa 5**

Considera a experiência que consiste em lançar um dado e registar o número da face virada para cima . Define , em extensão, os acontecimentos:

a) A:"Sair um número quadrado perfeito".

b) B: " Sair um divisor de 4".

c) C: "Sair um múltiplo de 3".

**Tarefa 6**

Considera a experiência que consiste em lançar dois dados cúbicos com as faces numeradas de 1 a 6 e registar a soma dos valores obtidos nas faces voltadas para cima.

a) Considera os acontecimentos:

A:" A soma é um número primo"

B:" A soma é um número maior que 1"

C:"A soma é um número par menor que 5"

D:" A soma é um número divisor de 13"

a.1. Representa os acontecimentos usando conjuntos

a.2. Dos acontecimentos dados indica um que seja:

a2.1. Certo

a2.2. Impossível

**Referência Histórica**

**Augustus De Morgan**

**(1806- 1871)**

Matemático e lógico inglês nascido na India.

Professor de matemática no Colégio Universitário de Londres entre 1828 e 1866; primeiro presidente da

Considera os acontecimentos

A: "O aluno é rapariga" e B : "O aluno tem mais de 15 anos"

Os acontecimentos:

A \ B : "As raparigas da turma com 15 anos ou menos"

B \ A: "Os rapazes da turma com mais de 15 anos"

A operação entre acontecimentos gozam de várias **propriedades**.

Consideremos três acontecimentos A, B e C de um espaço de acontecimentos S.

**Comutativa**

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

**Associativa**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

**Existência de elemento Neutro**

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap \Omega = A$$

**Existência de elemento absorvente**

$$A \cup \Omega = \Omega$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

**Distributiva**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## Leis de De Morgan

As seguintes propriedades são conhecidas como leis de De Morgan:

Negar que se realiza pelo menos um dos acontecimentos é afirmar que não se realiza nem um nem outro.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Negar que se realizam simultaneamente dois acontecimentos é dizer que não se realiza pelo menos um deles.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

### Teoria frequencista de probabilidade

Consideremos a experiência do lançamento de um dado cúbico com as faces numeradas de 1 até 6 e registar o número da face que fica voltada para cima.

O espaço amostral é { 1; 2; 3; 4; 5; 6}. Os acontecimentos elementares são: {1}; {2}; {3}; {4}; {5}; {6}

A experiência foi repetida várias vezes e o acontecimento A= {3} aconteceu 32 vezes.

O acontecimento A aconteceu muitas vezes?

A resposta a esta pergunta depende das vezes que se realizou a experiência.

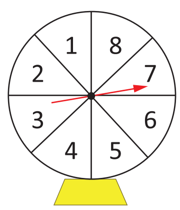
**Se a experiência foi repetida 40 vezes então o acontecimento A ocorreu muitas vezes. Mas se a experiência foi realizada 250 vezes, o acontecimento A ocorreu poucas vezes.**

Assim, indicar o número de vezes que ocorreu o acontecimento A, ou seja, a **frequência absoluta** do acontecimento A é pouco esclarecedor. No nosso exemplo a frequência **absoluta** do acontecimento A é 32 e a **frequência relativa** é $\frac{40}{250} = 0{,}16$. Em percentagem 16%.

> Se uma experiência é realizada "n" vezes e o acontecimento A ocorre "p " vezes, com p menor ou igual que n, definimos frequência relativa do acontecimento *A* como o quociente entre *p* e *n*.
>
> Usualmente representa-se por: $f_r(A) = \frac{p}{n}$

## Exemplo:

Uma roleta tem oito secções iguais sendo umas pintadas de azul, outras de verde e outras de vermelho.




A tabela seguinte mostra o resultado de 3000 experiências com a roleta.

| Cor | Frequência relativa |
|---|---|
| Vermelho | 0,50 |
| Verde | 0,20 |
| Azul | 0,30 |

Observa que 0,50 corresponde a 50% logo teríamos que pintar metade (4) de vermelho, três de azul e uma de verde.

Sociedade de Matemática de Londres. Formal Lógic foi a sua obra máis notável.

**Tarefa 7**

No lançamento de dois dados, com as faces numeradas de 1 a 6, somam-se as pintas das faces viradas para cima. Seja:

A:" A soma é múltipla de 4"

B:" A soma é múltipla de 6"

Define em extensão os acontecimentos reunião e interseção.

**Tarefa 8**

Um saco tem duas bolas brancas B1 e B2, e duas bolas amarelas A1 e A2. Extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas. Considera os acontecimentos:

C: " As duas bolas têm a mesma cor"

D:" pelo menos uma bola é branca"

Define em extensão os acontecimentos C, D , "C reunião com D" e "C interseção com D".

**Tarefa 9**

No lançamento de um dado, com as faces numeradas de 1 a 6, dá exemplos de acontecimentos que sejam contrários.

**Tarefa 10**

O espaço de resultados de uma experiência aleatória é:

$\Omega = \{ 2; 5; 8, 9;11;15 \}$

Considera os acontecimentos:

A = { 2; 5; 9 }

B = { 2; 5; 11; 15}

Representa na forma de conjunto os acontecimentos:

a) A \ B

b) $\overline{A}$

c) $\overline{A} \cap B$

d) $\Omega \setminus B$

**Tarefa 11**

No Lançamento de um dado, considera os acontecimentos:

A: " Sair face par"

B:" " Sair face menor que três"

Define em extensão a negação dos acontecimentos seguintes:

a) B

b) $A \cup B$

c) $A \cap \overline{B}$

d) B \ A

**Tarefa 12**

Prova que :

$\overline{A \cap \overline{B}} = B \cup \overline{A}$

$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Exemplo:

Quando lançamos dois dados equilibrados e adicionarmos os pontos das faces voltadas para cima, temos:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Vamos construir um quadro de distribuição de frequências relativas.

| Acontecimento | Soma 2<br>Soma 12 | Soma 3<br>Soma 11 | Soma 4<br>Soma 10 | Soma 5<br>Soma 9 | Soma 6<br>Soma 8 | Soma 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Freq. Relativa | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ | $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ | $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ |

## Propriedades da frequência relativa de um acontecimento

- Se A é um acontecimento impossível $f_r(A) = 0$
- Se A é um acontecimento certo $f_r(A) = 1$
- Se A é um acontecimento qualquer $0 \leq f_r(A) \leq 1$
- A soma das frequências relativas de todos os acontecimentos elementares é 1.

## Lei dos grandes números

A teoria frequencista refere que a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num determinado valor, à medida que o número de vezes que se realiza a experiência aumenta e é esse o valor que se assume para a probabilidade de um determinado acontecimento se realizar.

## Definição frequencista de probabilidade ou lei dos grandes números

A probabilidade de um acontecimento A associado a uma experiência aleatória é o valor para que tende a frequência relativa da realização de A, quando o número de experiências tende para infinito. A probabilidade de um acontecimento A representa-se por P(A).

## Exemplo:

Um dado cúbico tem as faces numeradas de 1 a 6 , sendo três faces amarelas, duas faces azuis e uma face vermelha

a) Considerando que o dado é equilibrado realizamos a experiencia aleatória que consiste no lançamento do dado e registar a pontuação da face que fica voltada para cima.

O Espaço amostral é Ω= {1;2;3;4;5;6}

Como o dado é equilibrado cada uma das faces tem probabilidade $\frac{1}{6}$

| Acontecimento elementar | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidade | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

b) Considerando ainda que o dado é equilibrado e realizamos a experiência aleatória que consiste no lançamento do dado e na verificação da cor da face que fica voltada para cima .

O espaço amostral é Ω ={ amarelo; vermelho; azul}

Mesmo que o espaço amostral tenha só três elementos para a determinação da probabilidade temos que tomar em conta todas as possibilidades que são as 6 faces.

| Acontecimento elementar | {amarelo} | {vermelho} | {azul} |
|---|---|---|---|
| Probabilidade | $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ |

c) Consideremos agora que o dado não é equilibrado (viciado) e que realizamos a experiência aleatória que consiste no lançamento do dado e registar a cor da face que fica voltada para cima

O espaço amostral é é Ω ={ amarelo; vermelho; azul}

Admitamos que a experiência foi repetida 5000 vezes e o número de vezes que aconteceu cada cor esta registado na seguinte tabela:

| Cor da face | Frequência absoluta | Frequência relativa |
|---|---|---|
| Amarelo | 3120 | $\frac{3120}{5000}=0{,}624$ |
| Vermelho | 45 | $\frac{45}{5000}=0{,}009$ |
| Azul | 1835 | $\frac{1835}{5000}=0{,}367$ |

**Tarefa 13**

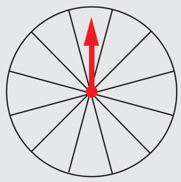
Sejam A e B dois acontecimentos incompatíveis de um espaço amostral S, verifica que :

a) $\overline{A}\cup\overline{B}=S$

b) $A\cap\left(B\cup\overline{A}\right)=\phi$

**Tarefa 14**

Uma roleta tem 12 secções iguais pintadas de laranja, azul e rosa.



Rodando 1000 vezes a roleta calcularam-se as frequências relativas das 3 cores, tendo-se obtido:

Laranja $\longrightarrow$ 0,25

Azul $\longrightarrow$ 0,50

Rosa $\longrightarrow$ 0,25

Determina o número de secções da roleta que estão pintadas com cada cor.

Temos então a seguinte tabela de probabilidades

| Acontecimento elementar | {amarelo} | {vermelho} | {azul} |
|---|---|---|---|
| Probabilidade | $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ |

**Tarefa 15**

Lançou-se 70 vezes uma dado tetraédrico com os vértices numerados de 1 a 4 .

Obteve-se 15 vezes o vértice um, 20 vezes o vértice dois, 12 vezes o vértice três e as restantes o vértice quatro.

a) Elabora um quadro de distribuição de frequências relativas dos acontecimentos elementares.

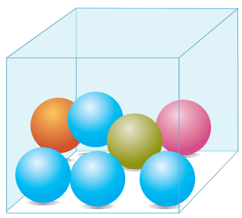
b) Determina a frequência relativa de cada um dos seguintes acontecimentos:

A: " Sair vértice não inferior a três"

B:" Sair vértice par"

## Definição clássica de probabilidade ou de Laplace (espaços finitos)

Se observamos a seguinte caixa onde se encontram 7 bolas, indistinguíveis ao tato. Ao retirar uma bola da caixa podemos afirmar que a probabilidade de sair uma bola azul é 4 em 7.



Seja A o acontecimento "Sair uma bola azul"

A probabilidade de A :

$$P(A)=\frac{4}{7}$$

Dizemos que dado um espaço de resultados S finito e tal que todos os resultados elementares são igualmente possíveis, **a probabilidade de um acontecimento A é o quociente entre o número de resultados favoráveis ao acontecimento A e o número de resultados possíveis.**

### Lei de Laplace

Consideremos uma experiência aleatória onde o espaço amostral Ω, é formado por n elementos. Se um acontecimento A é formado por m acontecimentos elementares equivalentes, sendo m menor ou igual que n.

A probabilidade do acontecimento A é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a A e o número de casos possíveis,

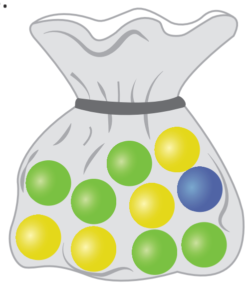
$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

$$P(A)=\frac{n^{o}\,de\ casos\ favoraveis\ ao\ acontecimento\ A}{n^{o}\,de\ casos\ possíveis}$$

A Lei de Laplace é considerada a primeira definição de probabilidade, daí ser conhecida como definição clássica de probabilidade.

## Exemplo:

Num saco há 10 bolas, iguais, mas de cores diferentes.



Cinco verdes, 4 amarelas e uma azul

Retiramos ao acaso uma bola do saco.

Considera os seguintes acontecimentos:

A: " Sair bola amarela"

B:"Sair bola verde"

C:"Sair bola azul

Vamos determinar a probabilidade de cada um dos acontecimentos anteriores:

$$P(A)=\frac{n^{o}\,de\ casos\ favoraveis\ ao\ acontecimento\ A}{n^{o}\,de\ casos\ possíveis}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=\frac{n^{o}\,de\ casos\ favoraveis\ ao\ acontecimento\ B}{n^{o}\,de\ casos\ possíveis}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=\frac{n^{o}\,de\ casos\ favoraveis\ ao\ acontecimento\ C}{n^{o}\,de\ casos\ possíveis}=\frac{1}{10}$$

**Tarefa 16**

Sabendo que, numa roleta, a probabilidade de saída de cada número é $\frac{1}{37}$, quantas vezes se espera que saia o 13 em 1000 jogadas?

## Exemplo:

Num inquérito a 100 pessoas, sobre se possuíam cão ou gato, obtiveram-se os seguintes dados: 32 têm cão; 14 têm gato e 6 têm cão e gato.

Escolhida uma dessas pessoas ao acaso, qual a probabilidade de:

a) Ter cão?
b) Só ter gato?
c) Ter pelo menos um destes animais?
d) Não ter cão nem gato?

Vamos começar por identificar os acontecimentos

C: "Ter cão"      G: "Ter gato"

Podemos organizar os dados numa tabela.

| | G | $\overline{G}$ | |
|---|---|---|---|
| C | 6 | | 32 |
| $\overline{C}$ | | | |
| | 14 | | 100 |

E completando a tabela obtemos a tabela seguinte.

| | G | $\overline{G}$ | |
|---|---|---|---|
| C | 6 | 32-6<br>26 | 32 |
| $\overline{C}$ | 14-6<br>8 | 68-8<br>60 | 100-32<br>68 |
| | 14 | 100-14<br>86 | 100 |

**Tarefa 17**

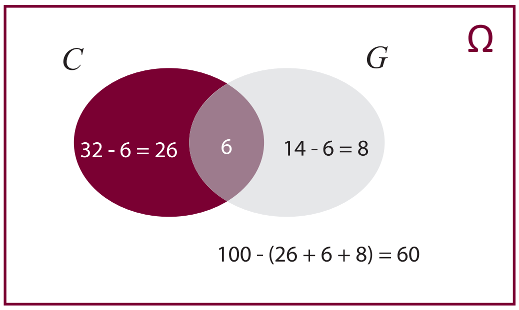
Considera a experiência que consiste em lançar um dado com a forma de um dodecaedro com as faces numeradas de 1 a 12 e observar o número da face que fica voltada para cima.

Indica acontecimentos com probabilidade:

a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{3}{4}$

Podemos também organizar os dados num diagrama de Venn.




Vamos agora responder às perguntas:

a) $P(C)=\frac{32}{100}=0,32$ (ter cão)

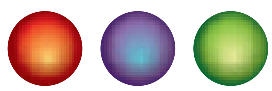
b) $P(G\cap\overline{C})=\frac{8}{100}=0,08$ (ter gato e não ter cão)

c) $P(G\cup C)=\frac{26+6+8}{100}=0,4$ (ter gato ou ter cão)

d) $P(\overline{G}\cap\overline{C})=\frac{60}{100}=0,6$ (não ter gato nem ter cão)

## Princípio fundamental de contagem

Num saco temos três bolas, uma vermelha (R), uma azul (A) e uma verde (V).

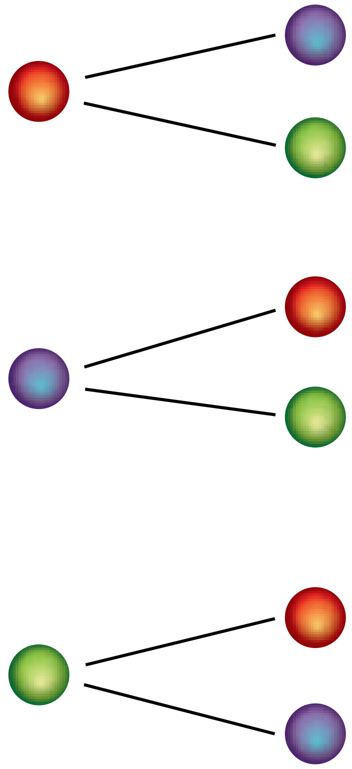


Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, sem reposição, duas bolas e verificar as cores.

Qual é a probabilidade do acontecimento:

T: “A primeira bola é azul e a segunda é vermelha”

Primeiro determinaremos o espaço amostral.



Espaço amostral

$\Omega$={RV; RA; AR; AV; VR; VA}

Seguidamente determinaremos os casos favoráveis e possíveis em relação ao acontecimento T (AR)

Para a 1º extração, há 3 possibilidades e cada uma delas correspondem duas possibilidades para a 2ª extração. Assim o número de **casos possíveis é dado por 3 x 2.**

Para a 1ª extração há um caso favorável a que lhe corresponde um caso favorável na 2ª extração. Assim o número de **casos favoráveis é dado por 1 x 1.**

Como os acontecimentos elementares são equiprovaveis, por aplicação da Lei de Laplace tem-se :

$$P(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Outra forma de pensar para determinar a probabilidade do acontecimento T é a seguinte:

Para a primeira bola ser azul há uma possibilidade em três e para a segunda ser vermelha há uma possibilidade em duas . Assim tem-se que

$$P(T) = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

**Tarefa 18**

No lançamento de dois dados numerados de 1 a 6 consideramos a experiência o produto dos dois valores que ficam na face virada para cima. Qual é a probabilidade de sair 28?